洛必达(L'Hospital)法则

练习 求极限

1、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$

2、$\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x^2}-\cot^2 x)$

3. 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$

4、$\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c})^{\frac{1}{x}}$

5、$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[n]{n}-1)$

1、 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}\quad (\dfrac{0}{0})$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-e}{x}=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{\dfrac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}$$

$$=e\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{(1+x)^2}-\dfrac{1}{1+x}}{2x}\qquad =e\lim_{x\to 0}\frac{-1}{2(1+x)^2}=-\frac{e}{2}$$

（或 $=e\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$

$$=e\lim_{x\to 0}\frac{-\ln(1+x)}{2x}=-\frac{e}{2})$$

1、 $$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}=1$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-e}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e\left[e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}-1\right]}{x}$$

$$=e\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}{x} = e\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$$

$$=e\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x} = e\lim_{x\to 0}\frac{-1}{2(1+x)}=-\frac{e}{2}$$

2、$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)$ $(\infty-\infty)$

解 $$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x - x^2}{x^2\tan^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x + x}{x}\cdot\frac{\tan x - x}{x^3}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{3x^2}=\frac{2}{3}$$

3　求 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$.　(∞^0)

解　$\because (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\frac{1}{\ln x}\cdot\ln(\cot x)}$,

先求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(\cot x)}{\ln x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{1}{\cot x}\cdot(-\csc^2 x)}{\dfrac{1}{x}}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-x}{\cos x\cdot\sin x} = -1$,

$\therefore$ 原式 $= e^{-1}$.

4、 $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}}$ (1^{∞})

$$= e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}}{x}}$$

$$= e^{\lim_{x\to 0^{+}}\frac{a^{x+1}\ln a+b^{x+1}\ln b+c^{x+1}\ln c}{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}}$$

$$= e^{\frac{a\ln a+b\ln b+c\ln c}{a+b+c}} = (a^{a}b^{b}c^{c})^{\frac{1}{a+b+c}}$$

另解 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}}$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}-1\right)}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}-a-b-c}{(a+b+c)x}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{x+1}\ln a+b^{x+1}\ln b+c^{x+1}\ln c}{(a+b+c)}}$$

$$= e^{\frac{a\ln a+b\ln b+c\ln c}{a+b+c}}$$

$5、\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[n]{n}-1)$ 直接用罗必塔法则?

$\because \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

$\therefore \lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln x}{x}}=1$

解. 先求 $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt[x]{x}-1)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln x}-1}{x^{-\frac{1}{2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln x}\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2(1-\ln x)}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2(-\frac{1}{x})}{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}=0$$

所以, $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[n]{n}-1)=0$

5、$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[n]{n}-1)$

解. 先求 $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt[x]{x}-1)=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}\ln x}-1}{x^{-\frac{1}{2}}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=0$$

所以，$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[n]{n}-1)=0$

$\because \lim_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$

小结论： $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

解. $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[x]{x}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}\ln x}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}=e^{0}=1$$